

Актелос м/Зрв

28.01.16

בחינת סמסטר א' במתמטיקה

הנחיות לנבחן

- א. משך הבחינה 3 שעות. אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של הבחינה.
יש לרשום מהי כיתת האם על המחברת.
ב. יש לפתור את כל השאלות.
ג. מותר להשתמש בדפי הנוסחאות וברשימת המשפטים המצורפים לשאלון הבחינה.
ד. בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן.
ה. כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות - חייבת הוכחה.
ו. כל משפט בגיאומטריה המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה.
ז. יש לפתור את השאלות 1, 2 באמצעות גיאומטריה המישור בלבד. מומלץ להשתמש בכלי שרטוט.

שאלה 1 - 12%

AB הוא קוטר המעגל שמרכזו O ומחוגו R. הנקודה P נמצאת על המשיק למעגל בנקודה A, הנקודה Q נמצאת על המשיק למעגל בנקודה B, הקטע PQ אינו חותך את הקוטר AB. נתון: $AP \cdot BQ = R^2$. הוכח כי

6% א. $\angle POQ = 90^\circ$

6% ב. הקטע PQ משיק למעגל.

שאלה 2 - 12%

במשולש ABC חסום מעגל בעל מחוג 4. אורך הצלע AC שווה 48, אורך הגובה BD שווה 8.5.

6% א. חשב את היקף המשולש.

6% ב. חשב את המרחק בין מרכז המעגל החסום לבין הקדקוד B.

שאלה 3 - 12%

סדרת הפרשים של סדרה a_1, a_2, a_3, \dots היא סדרה חשבונית שהפרשה 7. ידוע כי $a_{10} = 303$, $a_{12} = 450$. מצא את a_1 .

שאלה 4 - 14%

עבור אילו ערכים של m למשוואה $\log_2 x + 2m\sqrt{\log_2(2x)} - m + 3 = 0$ אין פתרון.

שאלה 5 - 12%

הוכח כי לכל n טבעי מתקיים $\left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{\sqrt{m}}\right) > 2\sqrt{n+1} - 1.9$ $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 1.9$

שאלה 6 - 14%

פתור: $\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_2 x + \log_{9x-1}(9x-1) \leq 0$

שאלה 7 - 14%

8% א. צייר רשומת (סקיצה) של גרף הפונקציה $y = \sqrt{x^2 - 12x + 36} - |x|$

6% ב. עבור אילו ערכים של m יש למשוואה $\sqrt{x^2 - 12x + 36} = |x| + mx$

1. פתרון אחד? 2. שני פתרונות? 3. שלושה פתרונות כאשר אחד מהם שלילי ושני האחרים נמצאים בקטע $(4, \infty)$?

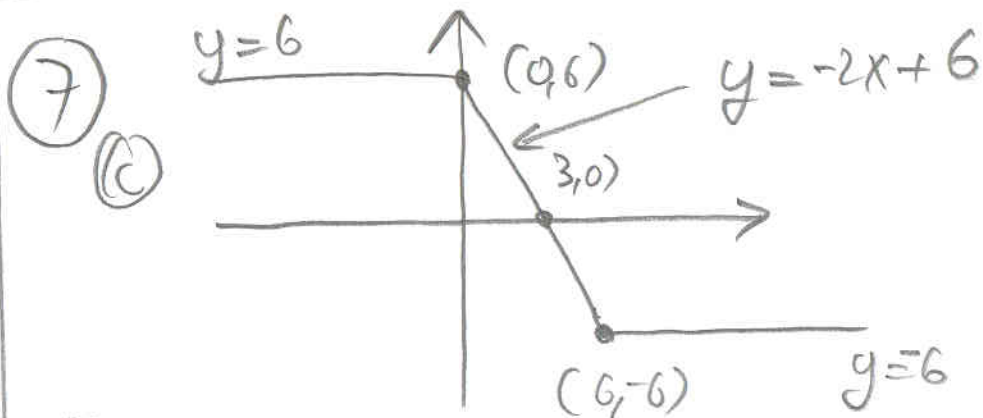
שאלה 8 - 10%

במשולש חד זווית ABC אורך הגובה AD שווה a, אורך הגובה CE שווה b, הזווית החדה בין גבהים אלה שווה α . בטא את אורך הצלע AC בעזרת a, b ו- α .

- ① (b) קטנה
 (p) קטנה
 (קטנה)

⑥ $\frac{1}{9} < X \leq \frac{1}{4}$
 $X \neq \frac{2}{9}$

② (c) $P = 102 \vec{n}_0$
 (p) $d = 5 \vec{n}_0$



③ $a_1 = -12$

⑧

$m < -1, m \geq 0$ (1)
 $m = -1$ (2)
 $-1 < m < -\frac{1}{2}$ (3)

④ $-2 < m < 2$

⑤ קטנה

⑧ $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}{\sin \alpha}$

③

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & b_2 & & & b_{n-1} & & \end{array}$$

$$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + \dots) = a_1 + \frac{n-1}{2} (2b_1 + (n-2)d)$$

$$a_n = a_1 + \frac{n-1}{2} (2b_1 + (n-2) \cdot 7)$$

$$\begin{cases} a_{10} = a_1 + \frac{9}{2} (2b_1 + 8 \cdot 7) = 303 \\ a_{12} = a_1 + \frac{11}{2} (2b_1 + 10 \cdot 7) = 450 \end{cases}$$

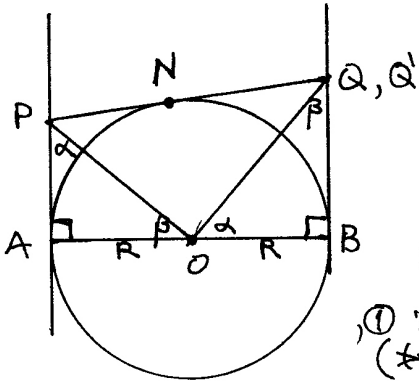
$$\begin{cases} a_1 + 9(b_1 + 28) = 303 \\ a_1 + 11(b_1 + 35) = 450 \end{cases}$$

$$2b_1 + 11 \cdot 35 - 9 \cdot 28 = 147$$

$$2b_1 = 14 \Rightarrow b_1 = 7$$

$$\boxed{a_1 = -12}$$

בתוך סאלה 1



(רדיוס, $OA, OB = R$) (ק)
 (רדיוס לאורך המשך) $OA \perp AP$
 (קנ"ו המשקה) $OB \perp BQ$

① $\frac{AP}{BO} = \frac{AO}{BQ} \Leftrightarrow \frac{AP}{R} = \frac{R}{BQ} \Leftrightarrow AP \cdot BQ = R^2$

① (המשקל 3.3.3, $\angle APO = \angle BQO = 90^\circ$) $\Delta APO \sim \Delta BQO \Leftrightarrow$

(שני זוויות שוות) $\angle APO = \angle BQO = \alpha \Leftrightarrow$
 (קוטג'ים באותו זווית) $\angle POA = \angle QOB = \beta$

$\angle AOB = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ \Leftrightarrow (\Delta APO \text{ ו-} \Delta BQO \text{ השלמה } 180^\circ) \alpha + \beta = 90^\circ$

$\angle POQ = 90^\circ \Leftrightarrow$

(ק) הוכחה קטליקה:
 נניח ש PQ איננו משך למעגל. (עדיף משך PN הוא רק את
 המשך קנ"ו $B - Q'$ (N נק' המשקה).

② המשקים למעגל $N - P, Q'$ שווים לכ"ן: $AP = PN, BQ' = Q'N$.

ס' $PO, Q'O$ חוצי זוויות כא"ה לכ"ן $\angle APO = \angle Q'PO = \alpha$; $\angle BQ'O = \angle PQ'O = \beta$

($AP, BQ' \perp AB$, $AP \parallel BQ'$ ק"ו) $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$

$\angle POQ' = 90^\circ \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Leftrightarrow$

($\angle POQ' = 180^\circ$ השלמה) $R^2 = ON^2 = PN \cdot Q'N = AP \cdot BQ'$

(אזכ"ר ②)

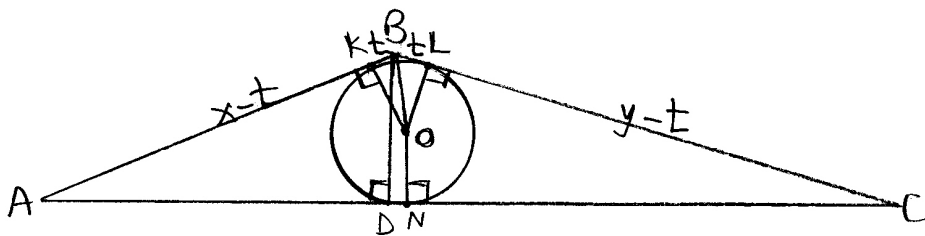
$R^2 = AP \cdot BQ$ אק"ו

$BQ = BQ' \Leftrightarrow BQ = BQ' \Leftrightarrow$

PQ משך למעגל \Leftrightarrow

28.1.16

בגובה סכמה 2



(שטח המסולס עם צלע וזווית) $S = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{48 \cdot 8\frac{1}{2}}{2}$ (K)
 $S = 204 \leftarrow$

(שטח עם רדיוס המעטפת) $S = pr$
 ($r=4, AC=48$ ויזע $BC=y, AB=x$ מו) $204 = \frac{48+x+y}{2} \cdot 4$
 ① $P(\Delta ABC) = 48+x+y = 102 \leftarrow$

.AC, AB, BC פו המעטפת של ההשקה נקראו K, L, D מו) (P)
 (משקים שליליים למעטפת נק' חיוביים)
 $BK = BL = t$
 $AK = AN = x - t$
 $CL = CN = y - t$

① ע"י) $2t = x + y - 48 \leftarrow 48 = AC = AN + CN = x - t + y - t$
 $x + y = 54 \quad = 54 - 48 = 6$
 $t = 3 \leftarrow$

(רדיוס המאונך למשיק) $OL \perp BC$
 ΔBOL ישר וליי רלפי שטח פאטור: $BO^2 = BL^2 + OL^2 \leftarrow$
 $= 3^2 + 4^2$
 $BO = 5 \leftarrow$

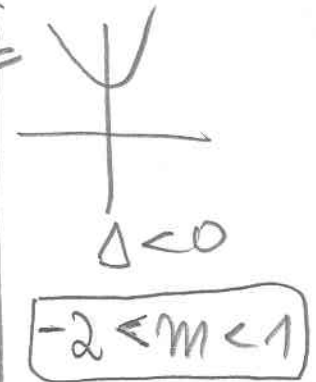
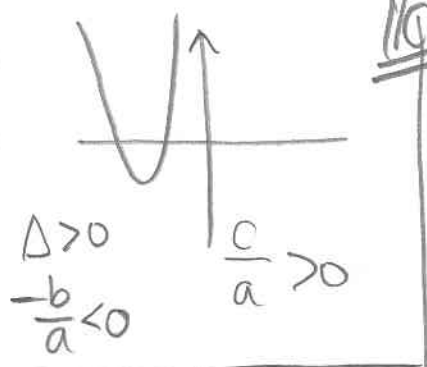
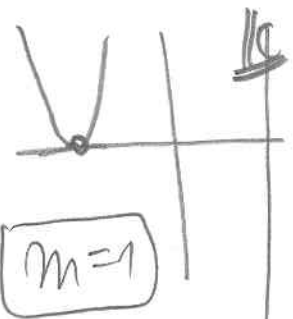
$$(\log_2 2x > 0 \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2})$$

$$(4) \log_2 x + 2m \sqrt{\log_2(2x)} - m + 3 = 0$$

$$(\log_2 x + 1) + 2m \sqrt{\log_2(2x)} + 2 - m = 0$$

$$\log_2(2x) + 2m \sqrt{\log_2(2x)} + 2 - m = 0$$

$$t^2 + 2mt + 2 - m = 0$$



$$-2m < 0 \Rightarrow m > 0$$

$$2 - m > 0 \Rightarrow m < 2$$

$$m > 1$$

$$m < -2$$

$$1 < m < 2$$

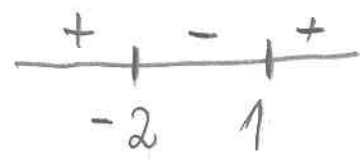
$$: \text{ } \overline{570}$$

$$-2 < m < 2$$

$$\Delta = 4m^2 - 4(2 - m)$$

$$\Delta = 4m^2 + 4m - 8$$

$$4(m^2 + m - 2)$$



$$[m=1] \quad t^2 + 2t + 1 = 0$$

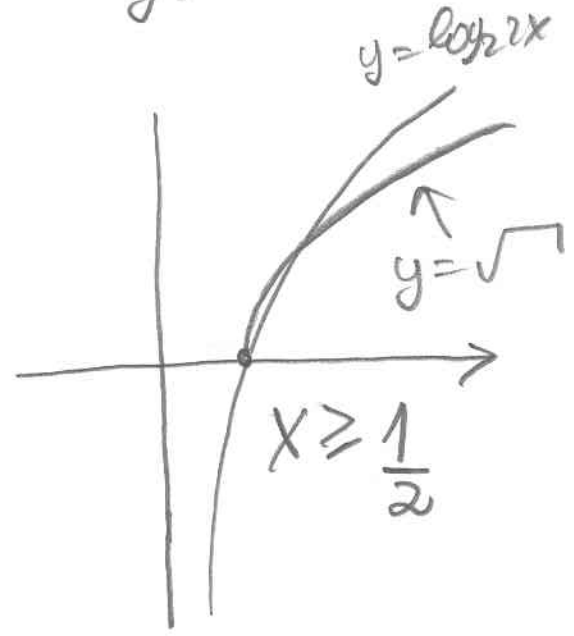
$$(t+1)^2 = 0$$

$$m=-2 \quad t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$(t-2)^2 = 0$$

$$\emptyset$$

$$\sqrt{\log_2 2x} = t > 0$$



no real roots

$$\log_2 2x = t^2$$

$$2^{t^2 - 1} = x$$

⑤

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 1.9$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{2\sqrt{n+1} - 1.9 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}} > 2\sqrt{n+2} - 1.9$$

$$2\sqrt{n+1} - 1.9 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\sqrt{n+2} - 1.9$$

$$2\sqrt{n+1}\sqrt{n+1} + 1 > 2\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}$$

$$2(n+1) + 1 > 2\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}$$

$$(2n+3)^2 > 2\sqrt{n^2+3n+1}$$

$$4n^2 + 12n + 9 > 4n^2 + 12n + 4$$

$$9 > 4$$

f.c.N

$$\frac{1}{1} > 2\sqrt{2} - 1.9$$

$$1 > 2\sqrt{2} - 1.9$$

$$2.9 > 2\sqrt{2}$$

$$2.9^2 > 4 \cdot 2$$

$$2.9^2 > 8$$

$$8.41 > 8$$

indukt

indukt

ist

⑥

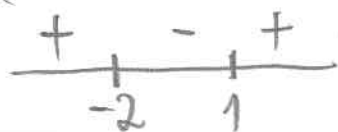
$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_2 x + \log_{9x-1} (9x-1) \leq 0$$

$$\frac{\log_2 \sqrt{2} + \frac{1}{2} \log_2 x}{\log_2 x} \cdot \log_2 x \leq -1 \quad | \quad \log_2 x = t$$

$$\frac{\frac{1}{2}(1+t)}{t} \cdot t \leq -1$$

$$t > 0 \quad \emptyset \quad \left\{ \begin{array}{l} t \leq 0 \\ \frac{\frac{1}{2}(1+t)t^2}{t} \geq 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} t(t+1) &\geq 2 \\ t^2 + t - 2 &\geq 0 \\ (t+2)(t-1) &\geq 0 \end{aligned}$$



! 0/0

$$t \leq -2 \quad \log_2 x \leq \log_2 \frac{1}{4}$$

$$x \leq \frac{1}{4}$$

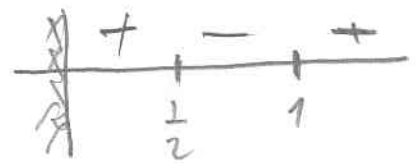
$$\frac{1}{9} < x \leq \frac{1}{4} \quad x \neq \frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned} 9x-1 > 0 &\rightarrow x > \frac{1}{9} \\ 9x-1 \neq 1 &\rightarrow x \neq \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$x > 0 \quad x \neq 1$$

$$\log_x \sqrt{2x} \geq 0 \leftarrow \log_{\frac{1}{x}} x$$

$$(x-1)(\sqrt{2x}-1) \geq 0$$

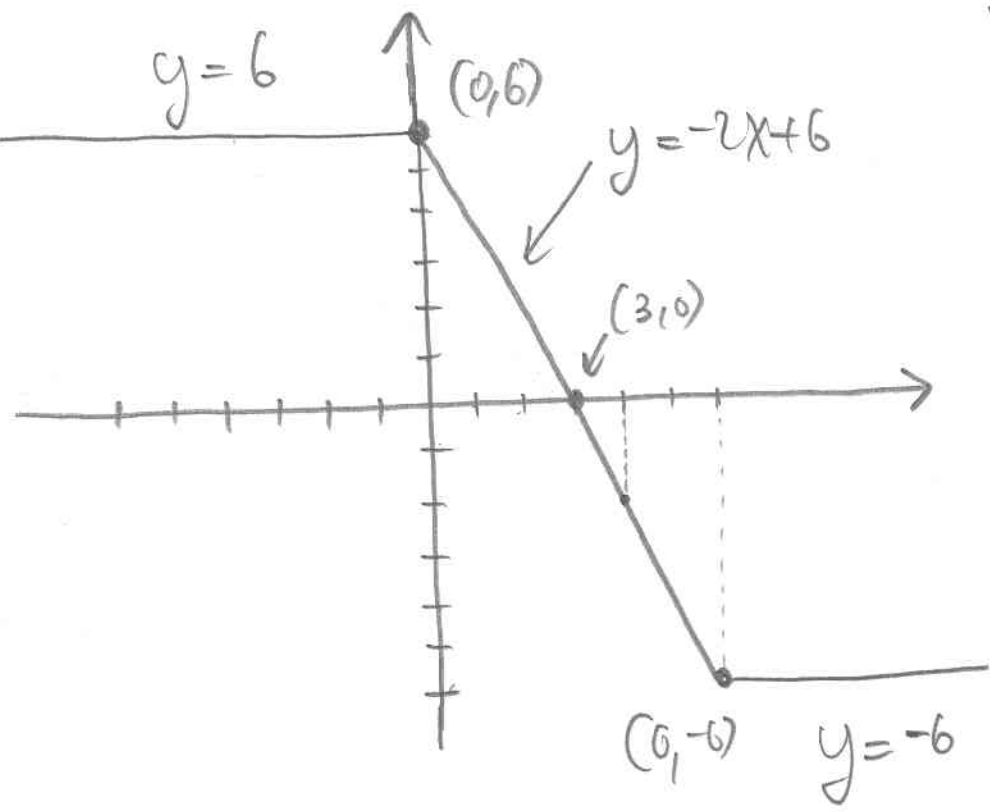


$$\begin{aligned} x &\geq 1 \\ 0 < x &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &> 1 \\ \frac{1}{9} < x &\leq \frac{1}{2} \\ x &\neq \frac{2}{9} \end{aligned} \quad *$$

7

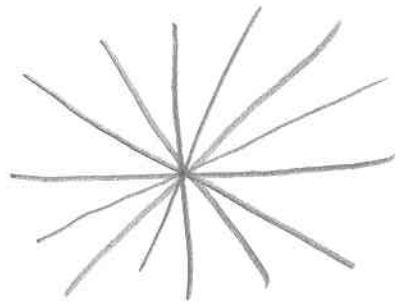
(c) $y = \sqrt{x^2 - 12x + 36} - |x| = |x-6| - |x|$



$x \leq 0$	$0 < x \leq 6$	$x > 6$
$y = -x + 6 + x$ $y = 6$	$y = -x + 6 - x$ $y = -2x + 6$ $(4, -2)$	$y = x - 6 - x$ $y = -6$
$(0, 6)$	$(6, -6)$	
$m < -1$	$m \geq 0$: 3/11' 10/10 (1)
	$m = -1$: 10/10 2 (2)

(?) $|x-6| - |x| = mX$

$y = mX$
 $(6, -6) \Rightarrow m = -1$

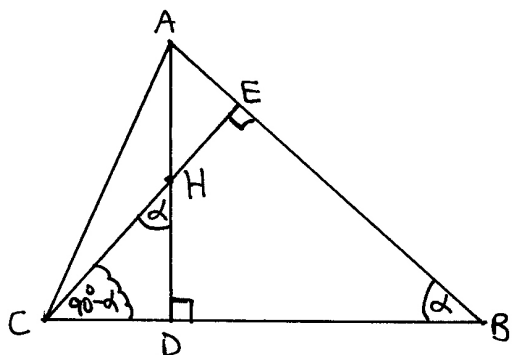


$-1 < m < -\frac{1}{2}$

1/10' 3/10 (3)
8/10' 9/10
 $4 < x < \infty$

$(4, -2)$
 $4m = -2 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$

28.1.16



8 הוכחה

$H = CE \cap AD$ (NB)

($\triangle CDH$ \sphericalangle \triangle מ"ת) $\sphericalangle ECB = 90^\circ - \alpha$

($\triangle BCE$ \sphericalangle \triangle מ"ת) $\sphericalangle B = \alpha$ \leftarrow

$$(\triangle ABD) \sin \alpha = \frac{AD}{AB}$$

$$AB = \frac{a}{\sin \alpha} \quad \leftarrow$$

$$(\triangle BCE) \sin \alpha = \frac{CE}{BC}$$

$$BC = \frac{b}{\sin \alpha} \quad \leftarrow$$

$$(\triangle ABC \sphericalangle \text{COS } \text{גזר}) \quad AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \alpha$$

$$= \frac{a^2}{\sin^2 \alpha} + \frac{b^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{2ab}{\sin^2 \alpha} \cdot \cos \alpha$$

$$AC = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha}}{\sin \alpha}$$